Objetivos a cubrir **Código : MAT-AL.2**

- Matriz Inversa.
- Determinante. Calculo de determinantes. Propiedades de los determinantes.
- Adjunta de una matriz. Calculo de la inversa de una matriz usando la adjunta.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Hallar la matriz inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución : Consideramos la matriz aumentada con la identidad de tamaño 4×4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_1 + F_4 \to F_4]{-3F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{-F_2 \to F_2}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{-F_2 + F_3 \to F_3 \\ -2F_2 + F_4 \to F_4}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & -7 & -10 & 1 & 2 & 0 & -8
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{3}F_3 \to F_3}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\
0 & 0 & -7 & -10 & 1 & 2 & 0 & -8
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[7F_3 + F_4 \to F_4]{\substack{-F_3 + F_1 \to F_1 \\ -2F_3 + F_2 \to F_2}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\
0 & 0 & 0 & -10 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} & -15
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{-\frac{1}{10}F_4 \to F_4}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2}
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4F_4+F_2 \to F_2]{-F_4+F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Luego, la inversa de la matriz A viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{13}{30} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 2 : *Demostrar que si A es una matriz invertible, tal que $A^3 = I$, entonces $A^{2n} = A^{-n}$.*

Demostración : Tenemos que

$$A^3 = I \quad \Longrightarrow \quad A^2 A = I$$

como A es invertible, entonces existe A^{-1}, multiplicamos la última igualdad por la matriz inversa de A.

$$A^2 A A^{-1} = I A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^2 = A^{-1},$$

multiplicamos, ambos lados de la igualdad, por A^2, $(n-1)$ −veces

$$A^2 \underbrace{A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{(n-1)\,-\text{veces}} = A^{-1} \underbrace{A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{(n-1)\,-\text{veces}},$$

como $A^2 = A^{-1}$, entonces

$$\underbrace{A^2 A^2 A^2 A^2 \cdots A^2}_{n-\text{veces}} = \underbrace{A^{-1} A^{-1} A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n-\text{veces}} \quad \Longrightarrow \quad \left(A^2\right)^n = \left(A^{-1}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad A^{2n} = A^{-n}$$

con lo que, si A es una matriz invertible, tal que $A^3 = I$, se tiene $A^{2n} = A^{-n}$. ★

Ejemplo 3 *: Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas, R*, que sea equivalente a* A *y una matriz invertible* $P_{3\times 3}$*, tal que* $R = PA$*.*

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida R.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3\to F_3]{F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_2+F_3\to F_3]{-2F_2+F_1\to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_3+F_2\to F_2]{3F_3+F_1\to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, la matriz R es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

Sea P la matriz de coeficientes

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$R = PA \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{12}+a_{13} & 2a_{11}-2a_{13} & a_{11}+3a_{12}+a_{13} & 5a_{12}+a_{13} \\ a_{21}-a_{22}+a_{23} & 2a_{21}-2a_{23} & a_{21}+3a_{22}+a_{23} & 5a_{22}+a_{23} \\ a_{31}-a_{32}+a_{33} & 2a_{31}-2a_{33} & a_{31}+3a_{32}+a_{33} & 5a_{32}+a_{33} \end{pmatrix},$$

de aquí, se obtiene el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}-a_{12}+a_{13}=1 \\ 2a_{11}-2a_{13}=0 \\ a_{11}+3a_{12}+a_{13}=0 \\ 5a_{12}+a_{13}=-\dfrac{7}{8} \\ a_{21}-a_{22}+a_{23}=0 \\ 2a_{21}-2a_{23}=1 \\ a_{21}+3a_{22}+a_{23}=0 \\ 5a_{22}+a_{23}=-\dfrac{1}{4} \\ a_{31}-a_{32}+a_{33}=0 \\ 2a_{31}-2a_{33}=0 \\ a_{31}+3a_{32}+a_{33}=1 \\ 5a_{32}+a_{33}=\dfrac{11}{8} \end{array}\right. \implies \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a_{11}-a_{12}+a_{13}=1 \\ 2a_{11}-2a_{13}=0 \\ a_{11}+3a_{12}+a_{13}=0 \\ 5a_{12}+a_{13}=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} a_{21}-a_{22}+a_{23}=0 \\ 2a_{21}-2a_{23}=1 \\ a_{21}+3a_{22}+a_{23}=0 \\ 5a_{22}+a_{23}=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} a_{31}-a_{32}+a_{33}=0 \\ 2a_{31}-2a_{33}=0 \\ a_{31}+3a_{32}+a_{33}=1 \\ 5a_{32}+a_{33}=\dfrac{11}{8} \end{array}\right. \end{array}$$

- Resolvemos el primer sub-sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}-a_{12}+a_{13}=1 \\ 2a_{11}-2a_{13}=0 \\ a_{11}+3a_{12}+a_{13}=0 \\ 5a_{12}+a_{13}=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right. \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} \end{array}\right)$$

- Resolvemos el segundo sub-sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{21}-a_{22}+a_{23}=0 \\ 2a_{21}-2a_{23}=1 \\ a_{21}+3a_{22}+a_{23}=0 \\ 5a_{22}+a_{23}=\dfrac{21}{4} \end{array}\right. \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{1}{4} \end{array}\right)$$

- Resolvemos el tercer sub-sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{31} - a_{32} + a_{33} = 0 \\ 2a_{31} - 2a_{33} = 0 \\ a_{31} + 3a_{32} + a_{33} = 1 \\ 5a_{32} + a_{33} = \dfrac{11}{8} \end{array}\right. \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & \dfrac{11}{8} \end{array}\right)$$

Observemos que los tres sub-sistemas poseen la misma matriz de coeficientes, lo único que cambia es el vector recurso, así, podemos resolver los tres sub-sistema simultaneamente, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array}\right)$$

para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida y obtener la matriz P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1 + F_3 \to F_3]{-2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5F_2 + F_4 \to F_4]{\substack{F_2 + F_1 \to F_1 \\ -4F_2 + F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & \dfrac{33}{8} & -\dfrac{11}{4} & \dfrac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{33}{8} & -\frac{11}{4} & \frac{11}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 11 & \frac{33}{8} & -\frac{11}{4} & \frac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-11F_3+F_4 \to F_4]{\substack{F_3+F_1 \to F_1 \\ 2F_3+F_2 \to F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz buscada es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

la cual es invertible, ya que

$$|P| = \begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \neq 0.$$

★

Ejemplo 4 *: Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix}$ *invertible. Si* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix}$*, hallar los valores de* a*,* b*,* x *e* y*.*

Solución : Como A es invertible, se tiene que $AA^{-1} = I$, así

$$\begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2b & 2b+ay+a^2 & -a+ax+b^2 \\ 0 & a & x \\ -2y+2 & ax & by+x^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de aquí,

$$\begin{cases} 1. \quad -a-2b=1 \\ 2. \quad 2b+ay+a^2=0 \\ 3. \quad -a+ax+b^2=0 \\ 4. \quad a=1 \\ 5. \quad x=0 \\ 6. \quad -2y+2=0 \\ 7. \quad ax=0 \\ 8. \quad by+x^2+2=1 \end{cases}$$

de la ecuación 4. y 5. se tiene que

$$a=1, \qquad x=0,$$

con lo que se satisface la ecuación 7. y el sistema se reduce a

$$\begin{cases} 1. \quad -1-2b=1 \\ 2. \quad 2b+y+1=0 \\ 3. \quad -1+b^2=0 \\ 6. \quad -2y+2=0 \\ 8. \quad by+2=1 \end{cases},$$

de la ecuación 6. se tiene que $y=1$, y el sistema se reduce a

$$\begin{cases} 1. \quad -1-2b=1 \\ 2. \quad 2b+y+1=0 \\ 3. \quad -1+b^2=0 \\ 6. \quad -2y+2=0 \\ 8. \quad by+2=1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1. \quad -1-2b=1 \\ 2. \quad 2b+1+1=0 \\ 3. \quad -1+b^2=0 \\ 8. \quad b+2=1 \end{cases} \implies b=-1,$$

luego, los valores son

$$a=1, \qquad x=0, \qquad y=1 \qquad b=-1.$$

★

Ejemplo 5 *: Sea A una matriz $n \times n$ dada por*

$$A = \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que $|A| = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$.

Demostración : Aplicando operaciones elementales sobre las filas de A, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con } j=2,3,\dots,n]{-F_1+F_j\to F_j} \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -x_2F_2+F_1\to F_1 \\ -x_3F_3+F_1\to F_1 \\ \longrightarrow \\ \vdots \\ -x_nF_n+F_1\to F_1 \end{array} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz triangular inferior, así, su determinante es el producto de los elementos de su diagonal, con lo que

$$|A| = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+1$$

★

Ejemplo 6 *: Halle la adjunta y la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución : Calculamos los cofactores

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} i & 0 \\ -i & 1 \end{vmatrix} = -i \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} i & 1 \\ -i & 0 \end{vmatrix} = i$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -i & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = i \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -i \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la matriz de cofactores es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

así, la matriz adjunta es

$$\operatorname{Adj}(A) = B^t = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 0 & -1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}\ A_{21} + a_{22}\ A_{22} + a_{23}\ A_{23} = (i)\,A_{21} + (1)\,A_{22} + (0)\,A_{23}$$

$$= (i)\,(i) + (1)\,(0) + (0)\,(-1) = i^2 = -1 \neq 0$$

luego, A es invertible y su inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 7 *: Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Demostrar que si A es invertible y $AB = O$, para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = O$.*

Demostración : Como A es invertible, existe A^{-1}, por lo tanto, multiplicamos por la izquierda por la inversa a la ecuación $AB = O$ y obtenemos

$$AB = O \quad\Longrightarrow\quad A^{-1}AB = A^{-1}O \quad\Longrightarrow\quad IB = O \quad\Longrightarrow\quad B = O.$$

★

Ejemplo 8 *:* ***a.*** *Para cada una de las dos matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

emplear operaciones elementales sobre las filas para determinar cuando es invertible y encontrar la inversa en caso de que lo sea.

b. *Hallar la inversa de AB, si es que existe.*

Solución : a. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(A \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-6F_1+F_3\to F_3]{-4F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz A **no** tiene inversa. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(B \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5F_2+F_3\to F_3]{F_2+F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_3+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right),$$

así, la matriz B tiene inversa, la cual viene dada por $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$

b. Multiplicamos las matrices A y B.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 & 26 \\ 1 & -4 & 0 \\ 18 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz $(AB \mid I)$ para transformar dicha matriz en su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 7 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 18 & 3 & 26 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1 - F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 7 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

por lo tanto, la matriz AB **no** tiene inversa. ★

Ejemplo 9 *: Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. *Hallar el valor de* c*, tal que* $|A - cI| = 0$

Solución : Tenemos que

$$A - cI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-c & 1 & 2 \\ 0 & -5-c & 1 \\ 0 & 0 & 7-c \end{pmatrix}$$

así,

$$0 = |A - cI| = \begin{vmatrix} 1-c & 1 & 2 \\ 0 & -5-c & 1 \\ 0 & 0 & 7-c \end{vmatrix} = (1-c)(-5-c)(7-c)$$

luego, $c \in \{-5, 1, 7\}$ ★

Ejemplo 10 *: Se sabe que*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$$

Calcular, usando propiedades de determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{vmatrix}$$

Solución : Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

para transformar dicha matriz en la matriz equivalente

$$B = \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{pmatrix},$$

así,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 \to F_1} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transpuesta}} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c & f & i \\ 2b & e & h \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 2b & e & h \end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow{3F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2c-6a & f-3d & i-3g \\ 6b & 3e & 3h \end{vmatrix} = (2)(-1)(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (2)(-1)(3)(1) = -6$$

★

Ejemplo 11 *: Hallar, usando determinante, los valores de α para los cuales la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$$

no es invertible

Solución : Calculamos el determinante de $|A|$ usando cofactores

$$|A|=\begin{vmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix}=(-\alpha)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+7 \end{vmatrix}$$

$$+(\alpha+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha+3 \end{vmatrix}$$

$$=-\alpha\left(2\alpha+14-\alpha-9\right)+\left(\alpha+7-6+3\alpha\right)+\left(\alpha+3\right)\left(\alpha+3-4+2\alpha\right)$$

$$=-\alpha\left(\alpha+5\right)+\left(4\alpha+1\right)+\left(\alpha+3\right)\left(3\alpha-1\right)=4\alpha^2+7\alpha-2,$$

luego,

$$|A|=4\alpha^2+7\alpha-2,$$

entonces la matriz A no es invertible si $|A|=0$, de aquí ,

$$4\alpha^2+7\alpha-2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=2 \quad \text{y} \quad \alpha=\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la matriz A es no invertible si $\alpha\in\left\{\frac{1}{4},2\right\}$ ★

Ejemplo 12 *: Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.*

1. *Si A es una matriz antisimétrica $n\times n$, con n impar, entonces $|A|=0$.*
2. *Si A es antisimétrica y ortogonal $n\times n$, entonces $|A|=\pm1$, para todo número n entero positivo.*
3. *Si A es una matriz invertible $n\times n$, entonces $|\mathrm{Adj}\,(A)|=|A|^{n-1}$.*
4. *Si A es una matriz invertible $n\times n$, entonces $(\mathrm{Adj}\,(A))^{-1}=\mathrm{Adj}\left(A^{-1}\right)$.*
5. *Si A es una matriz simétrica cualquiera, entonces A^2 también lo es.*
6. *Sea A una matriz $n\times n$ invertible y x un $n-$vector columna. Entonces, el sistema $A^tx=0$ tiene infinitas soluciones.*

Solución :

1. Si A es una matriz antisimétrica, entonces se cumple $A=-A^t$, así,

$$|A|=\left|-A^t\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |A|=(-1)^n\,|A|,$$

como n es impar, se tiene

$$|A| = -|A| \quad \Longrightarrow \quad 2|A| = 0 \quad \Longrightarrow \quad |A| = 0 \quad \leftarrow \quad \textbf{Verdadera}$$

2. Si A es antisimétrica, entonces, $A = -A^t$, por otra parte, si A es ortogonal, entonces $A^t A = I$, así,

$$A = -A^t \quad \Longrightarrow \quad A^t A = -A^t A^t \quad \Longrightarrow \quad I = -A^t A^t,$$

calculamos el determinante

$$|I| = \left|-A^t A^t\right| \quad \Longrightarrow \quad 1 = (-1)^n \left|A^t\right| \left|A^t\right| \quad \Longrightarrow \quad 1 = (-1)^n |A| |A| \quad \Longrightarrow \quad (-1)^n = |A|^2,$$

de aquí, $|A| \neq \pm 1 \quad \leftarrow$ **Falsa**.

3. Como A es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A),$$

así

$$|A| A^{-1} = \operatorname{Adj}(A),$$

calculamos el determinante

$$|\operatorname{Adj}(A)| = \left||A| A^{-1}\right| \quad \Longrightarrow \quad |\operatorname{Adj}(A)| = |A|^n \left|A^{-1}\right| \quad \Longrightarrow \quad |\operatorname{Adj}(A)| = |A|^n \frac{1}{|A|},$$

es decir,

$$|\operatorname{Adj}(A)| = |A|^{n-1} \quad \leftarrow \quad \textbf{Verdadera}$$

4. Tenemos que

$$(\operatorname{Adj}(A))^{-1} (\operatorname{Adj}(A)) = I \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{Adj}(A))^{-1} \; |A| \; A^{-1} = I$$

de aquí,

$$(\operatorname{Adj}(A))^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(A^{-1}\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{Adj}(A))^{-1} = \left|A^{-1}\right| \left(A^{-1}\right)^{-1} = \operatorname{Adj}\left(A^{-1}\right),$$

es decir,

$$(\operatorname{Adj}(A))^{-1} = \operatorname{Adj}\left(A^{-1}\right) \quad \leftarrow \quad \textbf{Verdadera}$$

5. Por definición, $A = A^t$, así,

$$A^2 = AA = A^t A^t = (AA)^t = \left(A^2\right)^t$$

Por lo tanto, la proposición es **Verdadera**

6. Si A es invertible, entonces A^t también lo es, así, el sistema $A^t x = 0$ es equivalente a $x = \left(A^t\right)^{-1} 0 = 0$, es decir, el sistema tiene unicamente la solución trivial.

Por lo tanto, la proposición es **Falsa**. ★

Ejemplo 13 : *Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justifique su respuesta.*

1. *Dadas las matrices* $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 3}$, $C_{3\times 4}$ *y* $D_{2\times 4}$, *sólo tiene sentido*

a. $(B + A) D + C$ *b.* $(D + AC) B$ *c.* $(D + BC) A$ *d.* $D + (B + A) C$

2. *Sean las rectas* $L : ax + by = e$ *y* $R : cx + dy = f$ *y el sistema*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

entonces

(a) *Si* $ad = bc$, *entonces necesariamente hay infinitas soluciones.*
(b) *Si* $ad = bc$, *entonces necesariamente no hay solución.*
(c) *Si* $ad \neq bc$, *entonces las rectas no son paralelas.*
(d) *Si* $ad \neq bc$, *entonces las rectas son paralelas.*

3. *Si* y *y* z *son soluciones del sistema* $Ax = b$, *entonces*

a. $y + z$ *es solución de* $Ax = b$ *b.* $y - z$ *es solución de* $Ax = 0$

c. $y - z$ *es solución de* $Ax = b$ *d.* $y + z$ *es solución de* $Ax = 0$

Solución : 1 **d**, 2 **c**, 3 **b** ★

Ejercicios

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $B = A^{-1}\left(A + A^2 + A^3\right)$.

2. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que $B^{-1} = B$.

3. Determine, en caso que exista, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ 8. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Hallar la inversa de la matriz $A_{3\times 3}$ cuyos elementos se calculan mediante la expresión

$$a_{ij} = \frac{2160}{i+j-1}$$

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demostrar, usando operaciones elementales de fila, que A es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$.

6. Determinar si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es invertible y hallar A^{-1}, si existe.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas R que sea equivalente a A y una matriz invertible $P_{3\times 3}$, tal que $R = PA$.

8. Hallar los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no sea invertible.

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & -2 \end{pmatrix}$ invertible. Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -2 & 2 & b \\ -1 & y & -1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a, b, x e y.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor(es) de x existe un escalar c, tal que $Ax = cx$?

11. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones matriciales

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 2. $X \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -17 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -10 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a. Hallar la inversa de A.

b. Hallar $\left(A^t\right)^{-1}$.

13. Calcule el determinante de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 2. $P = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $Q = \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{pmatrix}$

14. Sean A, B y C las matrices definidas mediante

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\,t & \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\,t & t \\ -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\,s & \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\,s & s \end{pmatrix}, \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Calcule el determinante de ABC.

15. Hallar el valor de c, tal que $|A - cI| = 0$, para las siguientes matrices A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcule el valor de

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+3 \\ x & x+3 & x+5 \\ x & x+5 & x+7 \end{vmatrix}$$

17. Demuestre que

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$

18. Si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 2$$

calcular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{11}+a_{13} & a_{21}+a_{23} & a_{31}+a_{33} & a_{41}+a_{43} \\ 3a_{12} & 3a_{22} & 3a_{32} & 3a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

19. Sabiendo que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & m & n \\ x & y & z \end{pmatrix} = AB$$

con $|A| = 3$ y

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular

$$\begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a+b & 2k+2m & x+y \end{vmatrix}$$

20. Calcular

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

21. Usando solo propiedades de los determinantes y el hecho que la matriz A cuyas filas 1, 2 y 3 son (x, y, z), $(3, 0, 2)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente, es tal que $|A| = 1$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

22. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & 3c \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ a & b & -3c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -2c \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 \\ a & b & 5c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & 3c \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{b}{2} & -6c \end{pmatrix}$$

Calcular: a. $|A+B|$; b. $|A-B|$; c. $|2A-C|$ si $|A| = 1$

23. Use la expresión de la adjunta para calcular la inversa de la matriz $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

24. Halle la adjunta y la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. Hallar, usando determinante, los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha-3 & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha+3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

26. Hallar, usando determinante, los valores de α para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 3 & \alpha \\ -1 & \alpha-2 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

27. ¿Para qué valores de k, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$$

tiene inversa?

28. Sea A una matriz $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que $|A| = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$.

29. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre

(a) La inversa y el determinante de A.

(b) La solución de la ecuación $XA = B$, donde

$$X = (x \quad y \quad z \quad t) \qquad \text{y} \qquad B = (19 \quad 12 \quad 17 \quad 14)$$

(c) El determinante de la matriz $\left(X^t X\right)^2$

30. Demuestre que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & -k-2 \\ 3k & 3k & 3k & 6-3k \\ k+1 & k-1 & 2k & -2k \\ k^2 & k^4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es singular para cualquier valor de k real.

31. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas ó falsas. Justificar todas sus respuestas

(a) Si A es una matriz antisimétrica $n \times n$, con n impar, entonces $|A| = 0$.

(b) Si A es antisimétrica y ortogonal $n \times n$, entonces $|A| = \pm 1$, para todo número n entero positivo.

(c) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que el sistema $Ax = b$ tiene tres soluciones diferentes. Entonces, $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones.

(d) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $A^2 = 3A - I$, entonces $A^3 = 3A - I$.

(e) Sean A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, si C y B son simétricas e invertibles, entonces la matriz $C^t + B^{-1}A^tC^{-1}$ es simétrica.

(f) Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces $|\text{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$.

(g) Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces $(\text{Adj}\,(A))^{-1} = \text{Adj}\left(A^{-1}\right)$.

(h) Si A es una matriz $n \times n$ e I_n la matriz identidad $n \times n$. Entonces $|A + I_n|^2 = |A|^2 + 2\,|A| + I_n$.

(i) Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $|A| = 2$, $|C| = 3$ y B se obtiene de A intercambiando las filas 1 y 3. Entonces $\left|A^tBC^{-1}\right| = -\dfrac{4}{3}$.

(j) Sea A una matriz $n \times n$ no invertible, entonces $A\text{Adj}\,(A)$ es invertible.

(k) Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si A es invertible y $A^{-1} = A^t$, entonces para cada matriz B cuadrada de orden n se cumple que $\left((AB)^t A^{-1}\right)^t = A^2B$.

(l) Si A, B y C son matrices $n \times n$, tales que $A^2 = B - C$, entonces $|A|^2 = |B| - |C|$.

(m) Para cualquier par de matrices A y B $n \times n$, se tiene que $|AB| = |BA|$.

(n) Sea A una matriz cuadrada de orden n, invertible, entonces todos los menores de A son invertibles.

(o) Sea A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, con B invertible, $det\,(A) = \dfrac{1}{4}$, $det\,(C) = \dfrac{1}{3}$ y $\left(C^2A^{-1}B^{-1}\right)^t B^{-1} = I$. Entonces $(det\,(B))^2 = \dfrac{4}{9}$.

(p) El elemento a_{32} de la adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es -2.

(q) Sean A y B matrices cuadradas de orden n, tales que $AA^t = B$, entonces $|B| \geq 0$.

(r) Si A una matriz cuadrada de orden n, entonces $|kA| = k\,|A|$, con k un escalar cualquiera.

(s) Si $|A| = |B|$, entonces $AB = BA$

32. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justifique todas sus respuestas.

1 Considerar las proposiciones

i. Si a, b y c son $n-$vectores, tales que $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

ii. Si a y b son $n-$vectores, tales que $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$, o bien ambos son nulos.

iii. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida por filas.

Entonces, son ciertas

a. Sólo i *b.* Sólo ii *c.* i y ii *d.* i y iii

2 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Es invertible y escalonada

b. No es invertible y no es escalonada

c. Es invertible y no es escalonada

d. No es invertible y es escalonada

3 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es

a. Singular si $a = b = 2$

b. Escalonada reducida por filas si $a = 0$ y $b \neq 0$

c. Invertible

d. Escalonada reducida por filas si $a \neq 0$ y $b = 0$

4 ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

i. $|AB| = |BA|$ para A y B de tamaño $n \times n$.

ii. Si A, B y C son de tamaño $n \times n$, tales que $AB = AC$, entonces $B = C$.

iii. Si A es antisimétrica $n \times n$, entonces $|A| = 0$, para todo n.

iv. No existen matrices A y B de tamaño $n \times n$, tales que $|A + B| = |A| + |B|$.

5 Sean A y B $n \times n$. Considere las proposiciones

i. Si A es equivalente por filas a la identidad, entonces $A\mathrm{Adj}\,(A) = 0$.

ii. $|A\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^n$

iii. $|A + B| = |A| + |B|$.

Entonces, es cierta

a. Sólo i

b. i y iii

c. Sólo ii

d. ii y iii

6 Dado el sistema $Ax = b_0$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b_0 = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, con A invertible, entonces

a. $y = \dfrac{ad - bc}{af - ec}$

b. $x = \dfrac{ad - bc}{cd - bf}$

c. $y = \dfrac{af - ec}{ad - bc}$

d. $x = \dfrac{bf - ed}{ad - bc}$

7 Si A es $n \times n$ invertible, tal que $A^2 = A$, entonces $|A|$ es igual a

a. -1

b. 1

c. 0

d. 2

8 Si A es el producto de matrices elementales, entonces

a El sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

b $|\mathrm{Adj}\,(A)| \neq 0$.

c $|A| = 0$.

d $|\mathrm{Adj}\,(A)| = 0$

9 Si $A_{n\times n}$ es invertible, entonces

$a.\quad |\text{Adj}\,(A)| = |A|$ $\qquad$ $b.\quad |\text{Adj}\,(A)| = |A|^{1-n}$

$c.\quad |\text{Adj}\,(A)| = |A|^{-1}$ $\qquad$ $d.\quad |\text{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$

10 Sea P ortogonal e I la identidad. Entonces, ¿cuál matriz es ortogonal?

$a.\quad 2P$ $\qquad$ $b.\quad P^2$ $\qquad$ $c.\quad P+I$ $\qquad$ $d.\quad P-I$

11 Sean A y B matrices $n\times n$. Se puede asegurar que

$a.\quad |A+B| > |A| + |B|$ $\qquad$ $b.\quad \left|(AB)^t\right| = \left|(BA)^t\right|$

$c.\quad |cA| \leq c\,|A|$, para todo número real c. $\qquad$ $d.\quad \left|B^t\right| = |B|$, si y solo si B es simétrica.

33. Colocar en la columna de la izquierda la única letra correspondiente de la columna de la derecha. Justificar todas sus respuestas.

( ) A es 3×3	$a)$ C no es invertible
( ) C es antisimétrica 3×3	$b)$ $\lvert B\rvert = 4$
( ) $B = E_{ij}\,(4)$	$c)$ $\lvert 5A\rvert = 125\,\lvert A\rvert$
	$d)$ $\lvert B\rvert = 1$
	$e)$ $\lvert A^t\rvert = \lvert B^t\rvert$
	$f)$ $\lvert 5A\rvert = 5\,\lvert A\rvert$
	$g)$ $A = B$
	$h)$ $\lvert C\rvert \neq 0$

Respuestas: Ejercicios

1. $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.2. $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

3.3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{4}{23} & -\frac{6}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{7}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{5}{23} \end{pmatrix}$;

3.6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $\qquad$ 3.8. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{60} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$; $\qquad$ 6. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

7. $R = I$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{30} - \frac{1}{10}i & \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \\ 0 & -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i & \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \\ -\frac{1}{3}i & \frac{1}{5} + \frac{1}{15}i & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \end{pmatrix}$; 8. -2 y $\frac{1}{4}$; 9. $a = 1$, $b = -1$, $x = 0$, y $y = 1$;

10. $c = 5$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 11.1. No tiene solución; 11.2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 11.3. $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -6 \\ 2 & -\frac{1}{6} & \frac{14}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$;

12.a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 12.$b$. $\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; 13.1. 0; 13.2. $x^3 + 1$; 13.3. $x + x^3$;

13.4. 0; 13.5. -72; 13.6. $a + b + c + d + 1$; 14. 4; 15.1. $c \in \{2, -3, 1\}$; 15.2. $c \in \left\{\frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right\}$;

15.3. $c \in \{3, -i, i\}$; 16. 0; 18. -6; 19. -12; 20. $a\,(b - a)\,(c - b)\,(d - c)$; 21. -2;

22.a. 0; 22.b. $16ac$; 22.c. 1; 23. Adjunta : $\operatorname{Adj}(Q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$;

24. Adjunta : $\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 0 & -1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 25. $\alpha \in \left\{-2, 2\sqrt{3} + 1, 1 - 2\sqrt{3}\right\}$;

26. $\alpha \in \left\{0, \sqrt{13} - 2, -\sqrt{13} - 2\right\}$; 27. $k = 11$; 29.a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = -1$;

29.b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 29.$c$. $\left(X^t X\right)^2 = \begin{pmatrix} 30 & 60 & 90 & 120 \\ 60 & 120 & 180 & 240 \\ 90 & 180 & 270 & 360 \\ 120 & 240 & 360 & 480 \end{pmatrix}$; 31.$a$. Verdadero; 31.$b$. Falso;

31.c. Verdadero; 31.d. Falso; 31.e. Falso; 31.f. Verdadero; 31.g. Verdadero; 31.h. Falso;

31.i. Verdadero; 31.j. Falso; 31.k. Verdadero; 31.l. Falso; 31.m. Verdadero; 31.n. Falso;

31.o. Verdadero; 31.p. Falso; 31.q. Verdadero; 31.r. Falso; 31.s. Falso; 33. c, a, b;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.

Álgebra lineal - Matriz inversa. Determinante. Farith J. Briceño N.

Última actualizacón: Mayo 2012 e-mail : farith.math@gmail.com